

月一化学工学講義③

2012.8.31

佐々木 満

次元解析

π 定理

無次元項の数 $p = \text{物理量の数 } n - \text{基本量の数 } m$

Quiz 内径 D の平滑円管内を密度 ρ 、粘度 μ の流体が平均流速 U で流れている。管内壁面の摩擦応力 (管内壁単位面積にかかる摩擦力) τ_w を次元解析によって求めよ。なお、単位系はSIを用いるものとする。

- ① 変数の数 $n = 5$, 基本数の数 $m = 3$ より、 π 定理によれば τ_w は物理量相互間の関係 $p = 5 - 3 = 2$ 個の無次元項で表される。
- ② τ_w の式を仮定し、次元式の形で書き直す。
- ③ 各次元における左辺・右辺の収支式を立てる。4つの未知定数に対し、3本の等式が成立することにより、ある1個の未知定数で他の3種の未知定数を表す。
- ④ τ_w の式に結果を代入し、整理する。

$$\tau_w = k(U^2 \rho) \left(\frac{DU\rho}{\mu} \right)^{-a^4}$$

$$\therefore \frac{\tau_w}{U^2 \rho} = k \left(\frac{DU\rho}{\mu} \right)^{-a^4}$$

k と a^4 は実験により決定すべき定数である。

層流・乱流, 摩擦力

流体の流れの様子を無次元数 Re を指標とすると、以下の分類となる。

- (1) 層流範囲: $Re < 2300$
- (2) 過渡範囲(遷移範囲): $2300 < Re < 4000$
- (3) 乱流範囲: $4000 < Re$

※ 円管内の速度分布などは次回に講義・演習いたします。

流れの中に固体がある場合, その表面(面積 A [m^2])には摩擦力がはたらく。このとき摩擦力を F_w [N]とすると, 単位面積当たりの運動エネルギー K [J/m^3]と次のような関係となる。

$$\frac{F_w}{A} = Kf = \tau_w \qquad K = (1/2)\rho U^2$$

ここで、 f は無次元量で, 摩擦係数 [一]と呼ばれ、 Re と固体表面の形状により変化する。

円管内壁での壁面摩擦応力 τ_w [Pa] に相当する圧力損失 ΔP は？

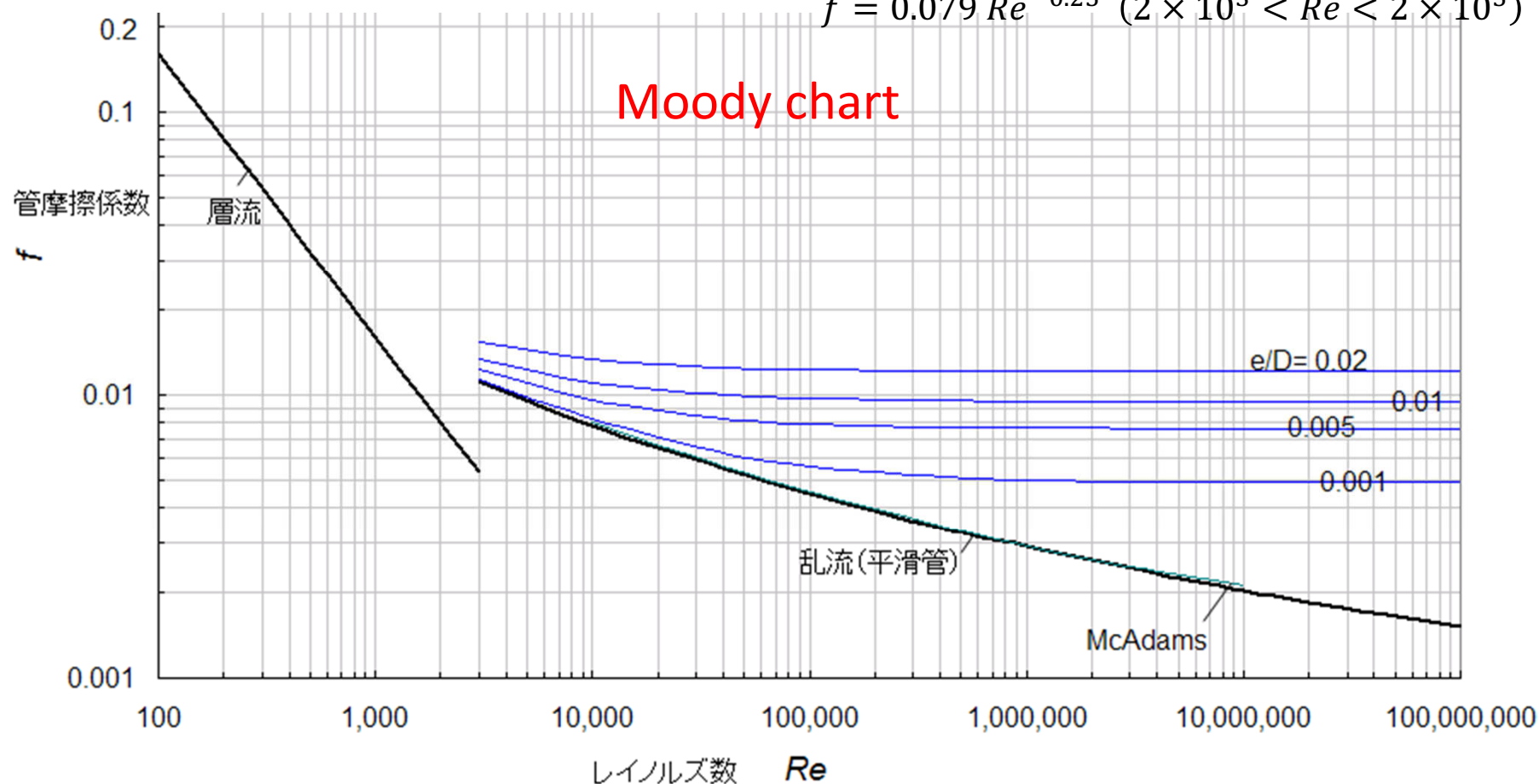
$$\tau_w = \left(\frac{\rho U^2}{2} \right) f \quad \text{より} \quad \Delta P = 4f \left(\frac{L}{D} \right) \left(\frac{\rho U^2}{2} \right) \quad \text{Fanningの式}$$

円管内層流の場合 $f = \frac{16}{Re}$

円管内乱流の場合 $\frac{1}{\sqrt{f}} = 3.48 - 4.0 \left\{ 2 \left(\frac{\varepsilon}{D} \right) + \frac{9.35}{Re\sqrt{f}} \right\}$

平滑管 ($\varepsilon = 0$): $\frac{1}{\sqrt{f}} = 4.0 \log(Re\sqrt{f}) - 0.4$

$$f = 0.079 Re^{-0.25} \quad (2 \times 10^3 < Re < 2 \times 10^5)$$



演習問題

3B鋼管内を293 Kの水が2.0 m/sで輸送されている。次の(1), (2)の場合の壁面摩擦応力 τ_w , 壁面摩擦力 F_w , 圧力損失 ΔP , 圧力降下 Δp を求めよ。

(1) 全長 10 mの水平管

* (2) 全長 10 mの垂直管(上昇流)

- 水の密度、粘度は次のように仮定すること: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.001 \text{ Pa s}$
- 3B鋼管の近似内径は次の値を使用すること: $D = 80.7 \text{ mm}$
- 3B鋼管の粗滑度 $\varepsilon = 0.0005 \text{ [m]}$

(1)の答え

$$Re = 1.61 \times 10^5$$

$$f = 0.0049 \sim 0.005 \quad (\text{from } \varepsilon/D = 0.0006 \text{ and } Re = 1.61 \times 10^5)$$

$$K = 2000 \text{ J/m}^3$$

$$\tau_w = 9.8 \text{ Pa}$$

$$F_w = A\tau_w = 24.8 \text{ N}$$

$$\Delta P = 4.86 \text{ kPa}$$